17/2/20

Αλγεβρικές Καμπύλες (8ο εξάμηνο) — Εισαγωγικά

Γεωμετρία:	Άλγεβρα:
K^n ο n-διάστατος χώρος	$K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ πολυωνυμικός δακτύλιος n μεταβλ.
K^2 επίπεδο	

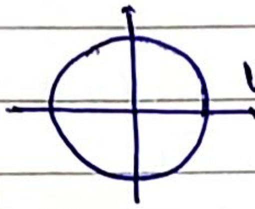
$$V(f) \xleftrightarrow{f} K[x,y]$$

(K σώμα) πολ/μο f

$f \in K[x,y]$

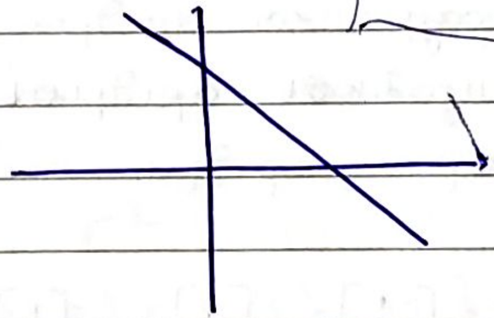
$V(f) = \{ P=(x_0,y_0) \in K^2 \mid f(x_0,y_0) = 0 \}$ επίπεδες καμπ.

Πχ. • $f = x^2 + y^2 - 1$ → το αντίστοιχο γεωμετρικό αντικείμενο



Θέλουμε το σημείο (x_0,y_0): $f(x_0,y_0) = 0 \iff x_0^2 + y_0^2 = 1$ (κύκλος)

• $h = x + y - 1$ →

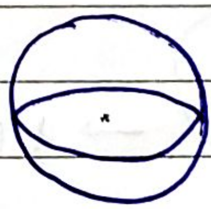


Αλγεβρικές υπερεπιφάνειες

$f \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$

$V(f) = \{ P = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \}$

Πχ. $V(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$:



$V(f_1,\dots,f_k) = \{(a_1,\dots,a_n)\in K^n \mid f_i(a_1,\dots,a_n)=0,\ 1\le i\le k\}$

όπου $f_i \in K[x_1,\dots,x_n]$

→ αλγεβρικά σύνολα

αλγεβρικές ποικιλότητες

$V(I)=\{(a_1,\dots,a_n)\in K^n \mid f(a_1,\dots,a_n)=0 \quad \forall f\in I\}$

Ιδεώδη του $K[x_1,\dots,x_n]$

Ιδεώδες είναι ουσιαστικά ένα σύνολο πολ/μων

Πιο αναλυτικά:

Επίπεδο $K^2 = \{(x_0,y_0) \mid x_0\in K,\ y_0\in K\}$

K σώμα

$K=\mathbb{R}$ πραγματικοί αριθμοί

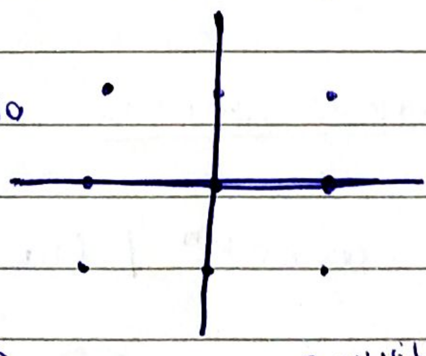
$K=\mathbb{C}$ μιγαδικοί αριθμοί

$K=\mathbb{Q}$ ρητοί αριθμοί

$K=\mathbb{Z}_3=\{[-1]_3, [0]_3, [1]_3\}$

Επίπεδο $K^2=\mathbb{Z}_3^2$

$|K^2| = 3\times 3 = 9$ σημεία



Πόσες ευθείες έχω / περνάνε ? → $V(\underset{\text{3 τιμές}}{\alpha} x + \overset{\text{3 τιμές}}{\beta} y + \underset{\text{3 τιμές}}{\gamma})$

Φαίνεται να 'χω 7 ευθείες ... Δεν είναι όμως!

π.χ. για $\alpha = \beta = \gamma = 0$ δεν είναι ευθεία

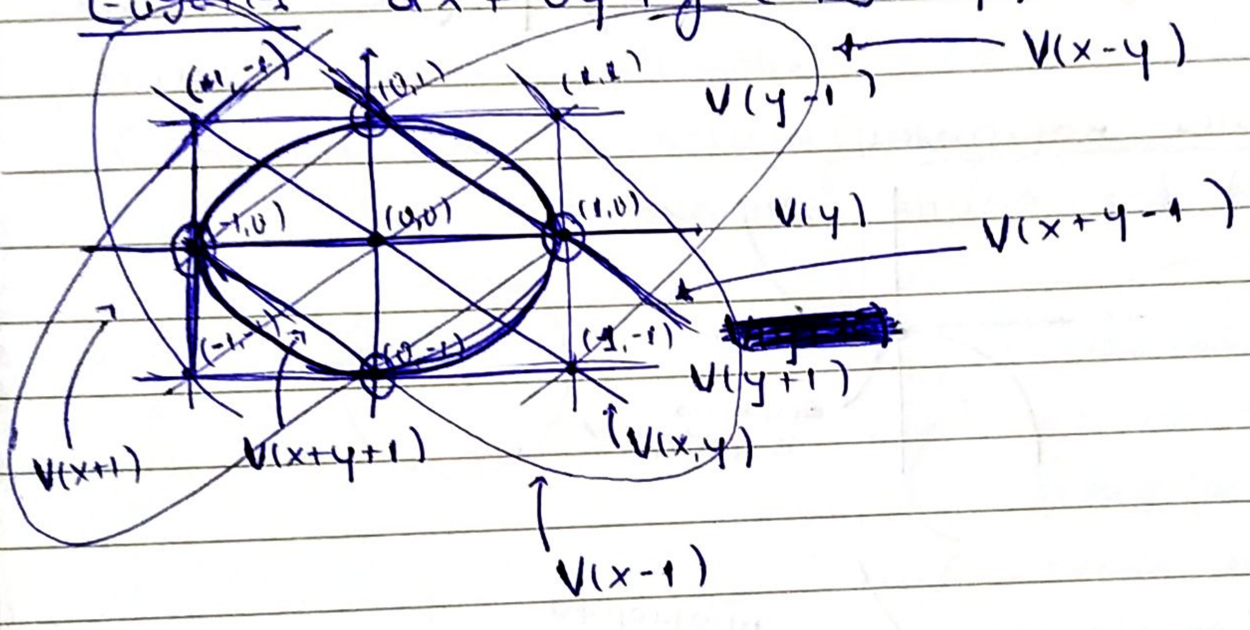
$\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$ — " —

Θέλω περιορισμούς για α, β, γ

Αλλά $x + y - 1 = 0$ είναι ίδια ευθεία με την $-x - y + 1 = 0$ (πολλαπλασιάζω με κάτι $\neq 0$)

Άρα συνολικά έχω $\frac{8 \cdot 3}{2} = 12$ ευθείες

Ευθείες $\alpha x + \beta y + \gamma \in \mathbb{Z}_3(x, y)$

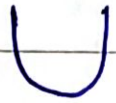
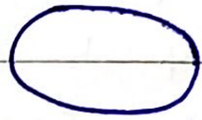
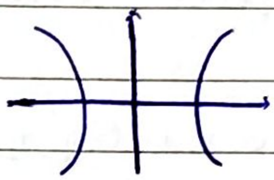


π.χ. $V(x^2 + y^2 - 1)$ $\quad \mathbb{C}^2$

↳ σημεία του: $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$

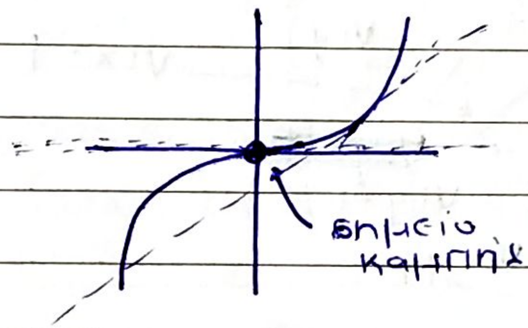
(φαίνεται ο κύκλος στο σχήμα πάνω)

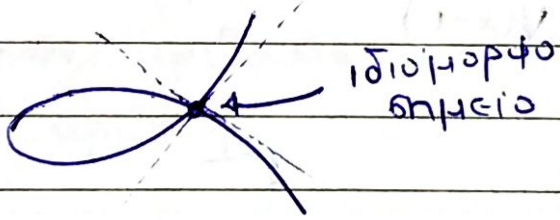
$\mathbb{R}^2$ Αλγεβρικές καμπύλες

- $V(ax + \beta y + \gamma)$ ευθείες
  $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$
- $V(y - x^2)$ παραβολές 
- $V\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1\right)$ έλλειψη 
- $V\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1\right)$ υπερβολή 

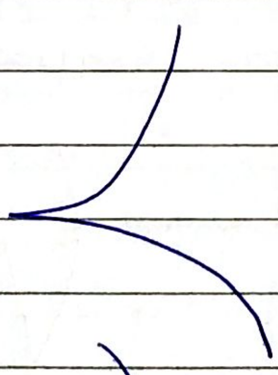
Τριτοβάθμιες καμπύλες

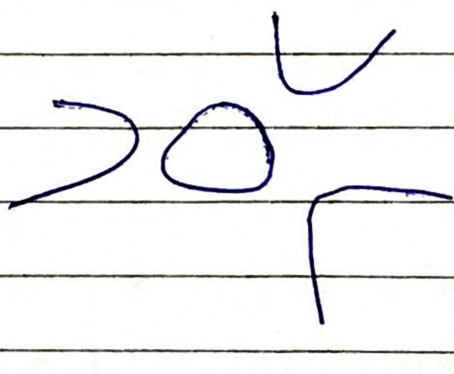
- $V(y - x^3)$

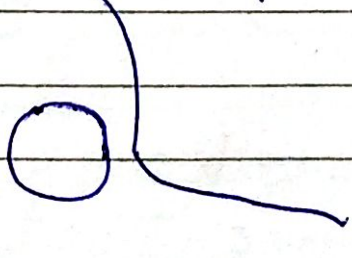




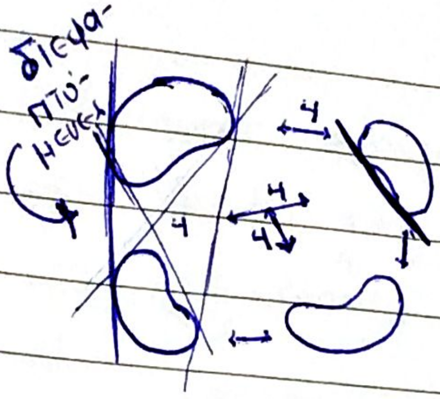
Στο σημείο αυτό μπορώ να φέρω δυο εφαπτόμενες







Αυτό δεν είναι ποτέ κύκλοι !



Πόσες διεφαπτόμενες ?
↳ 28 (θεώρημα !)

$4 \cdot 6 + 4 = 28$

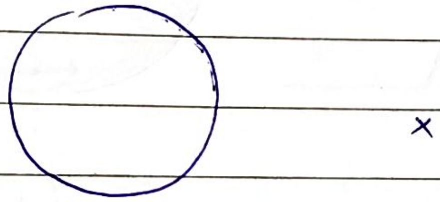
Προβολική γεωμετρία

Έχει ενσωματωμένο το ∞.

Αν βάλουμε σημείο στο ∞ βάζουμε ένα σημείο κ. μια διεύθυνση.

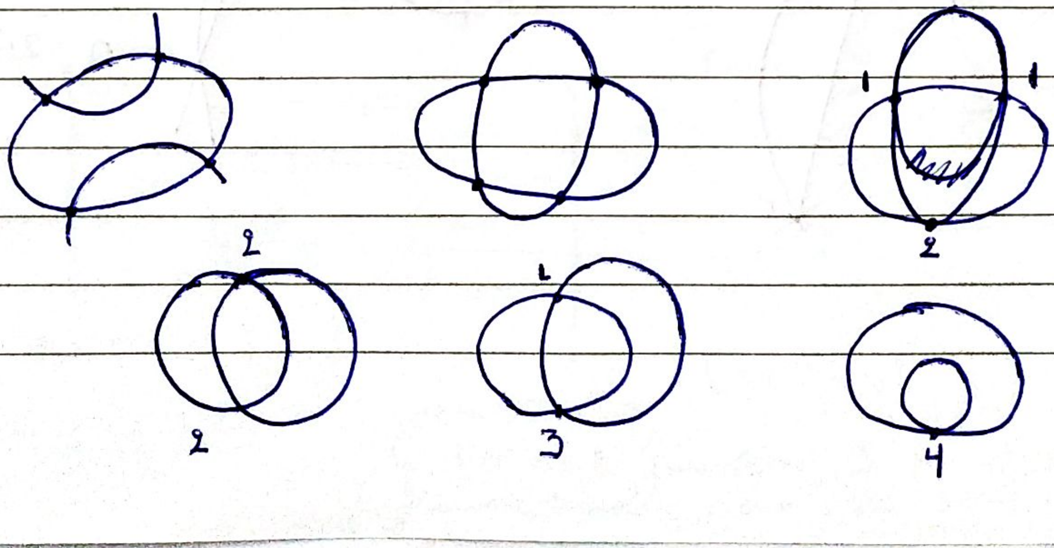
Ο κύκλος έχει 2 σημεία στο ∞

× κυκλικά σημεία στο ∞



Ουσιαστικά τα κυκλικά σημεία "ξεχωρίζουν" τον κύκλο από την έλλειψη

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Bezut</u>: Δύο καμπύλες βαθμών m,n τέμνονται σε **m·n** σημεία



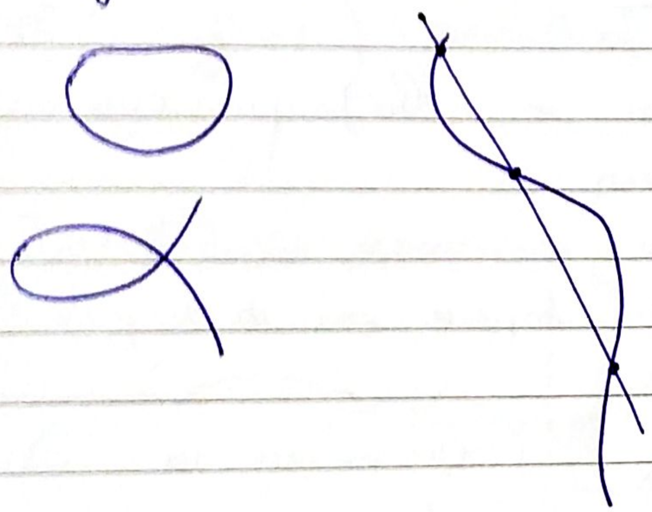
Θέλω να βρω τα κοινά σημεία (σημεία τομής) των καμπυλών $f(x,y)=0$ κ. $g(x,y)=0$

m-βαθμού $\qquad$ n-βαθμού

Αυτό γίνεται με την απαλοίφουσα

$(m+n)\times(m+n)$ ορίζουσα

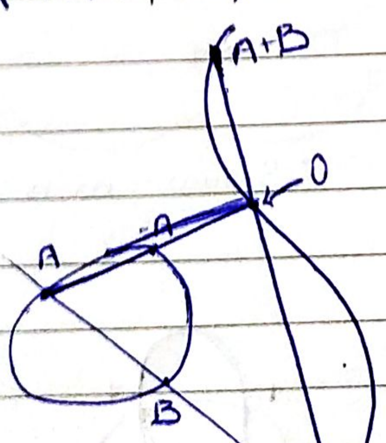
Τι γίνεται με τα σημεία καμπής ?

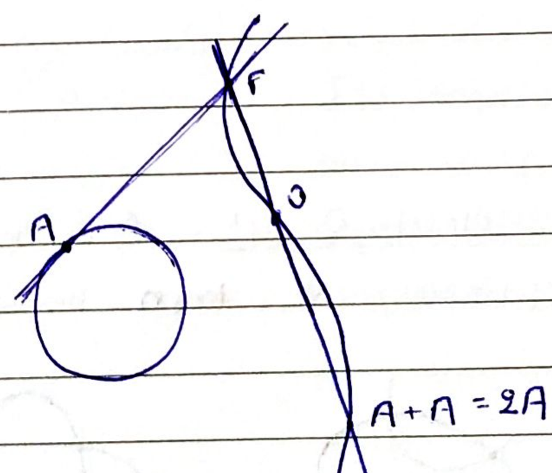


$\mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

3βάθμια χωρίς ιδιόμορφα σημεία έχουν 9 σημεία καμπής

$(V(f),+)$

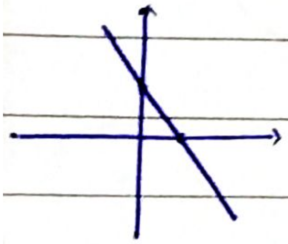




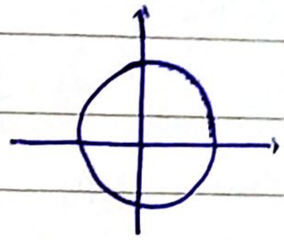
Γιατί μας ενδιαφέρει να ανάγουμε προβλήματα στο $\mathbb{Q}$ κ. όχι στο $\mathbb{R}$?

$\Downarrow$

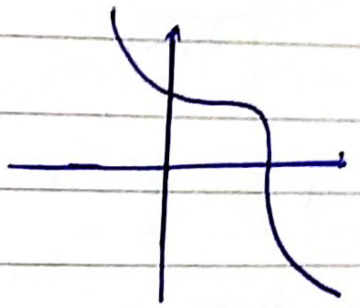
π.χ. $\boxed{\mathbb{R}^2}$



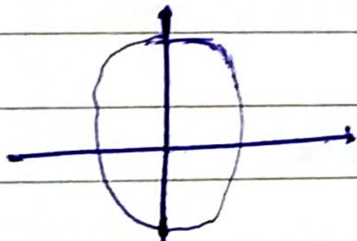
$V(x+y-1)$



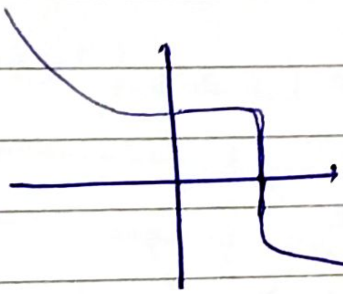
$V(x^2+y^2-1)$



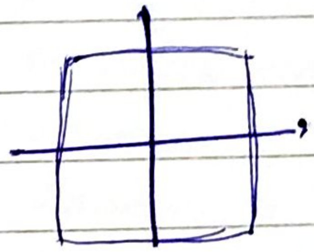
$V(x^3+y^3-1)$



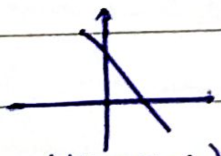
$V(x^4+y^4-1)$



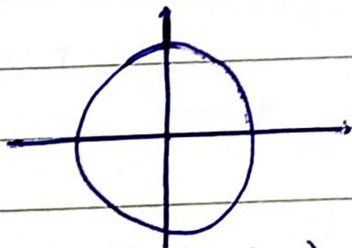
$V(x^{2n}+y^{2n}-1)$



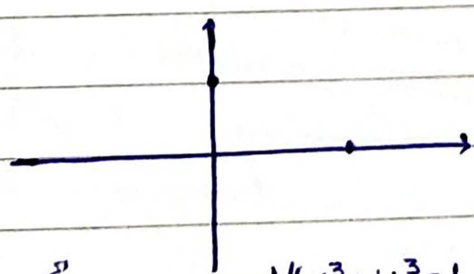
$\boxed{\mathbb{Q}^2}$



$V(x+y-1)$

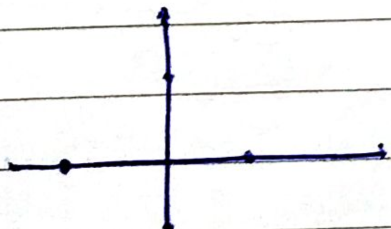


$V(x^2+y^2-1)$

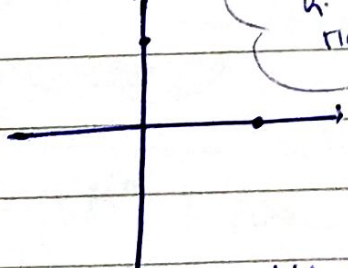


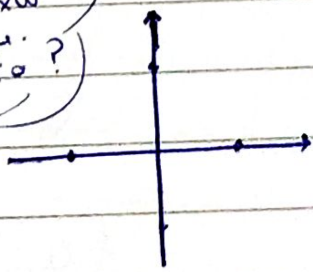
$V(x^3+y^3-1)$

Γιατί από εδώ κ. πέρα έχω πεπερασμ. στοιχεία ?



$V(x^4+y^4-1)$



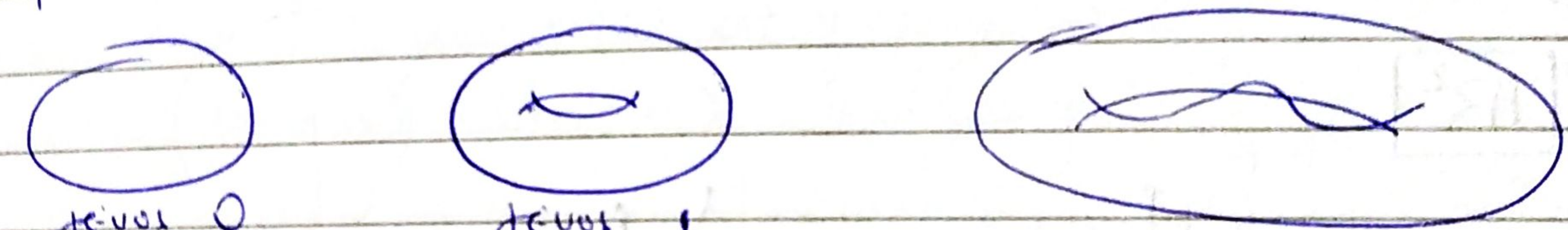


$V(x^{2n}+y^{3n}-1)$

Fermat → Από 3 κ. πάνω σημεία δεν έχω ρητά σημεία

Ο Mordel ~~απέδειξε~~ είπε ότι όποια καμπύλη έχει γένος από 3 κ. πάνω ~~δεν~~ έχει πεπερ. ρητά σημεία.

Το μυστικό δηλ. βρίσκεται στην τοπολογία



γένος 0 γένος 1 γένος 3

Γένος είναι η "τρύπα" στην καμπύλη